דף תרגילים מס' 6 – טורי פורייה טריגונומטריים

תרגיל 6.1 במרחב $C^0[-1,1]$ נגדיר את הפונקציות:

$$f_0(x)=1,\ \ f_1(x)=x+a,\ \ f_2(x)=x^2+bx+c,\ \ f_3(x)=x^3+Ax^2+Bx+C.$$

ידוע כי הקבוצה $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ הינה מערכת אורתוגונאלית ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית בקטע

(א) מצאו את הקבועים a,b,c,A,B,C.

(ב) לכל $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ נגדיר

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\int_{-1}^{1}\left(x^4-\alpha f_0(x)-\beta f_1(x)-\gamma f_2(x)-\delta f_3(x)\right)^2dx$$

הראו ש- F מקבלת ערך מינימלי בנקודה אחת בלבד ומצאו אותה.

תרגיל 6.2 מצאו טור פורייה מחזורי לכל אחת מהפונקציות הבאות בקטע $[-\pi,\pi]$:

(א) $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x\le\pi\end{cases}$

(ב) $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x\le\pi\end{cases}$

(ג) $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x\le\pi\end{cases}$

(ד) $f(x)=\pi+x$

(ה) $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin x & 0\le x\le\pi\end{cases}$

תרגיל 6.3 חשבו טורי פורייה לפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=x^2,\quad -\pi\le x\le\pi$.

(ב) $f(x)=x|x|,\quad -\pi\le x\le\pi$.

תרגיל 6.4 פתחו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$ לטור קוסינוסים.

שאלה 6.5 פתחו את הפונקציה $f(x)=\cos(2x)$ בקטע $[0,\pi]$ לטור סינוסים.

תרגיל 6.6 מצאו את הטור פורייה של הפונקציה $f(x)=|x|$ בקטע $[-1,1]$.

תרגיל 6.7

(א) פתחו את הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 3, & \pi \le x < 4\pi \\ -1, & 4\pi \le x \le 5\pi \end{cases}$ לטור פורייה בקטע $[\pi,5\pi]$.

(ב) נסמן ב- $S(x)$ את סכומו של הטור פורייה שמצאתם בסעיף הקודם. מהם $S(-2\pi)$? $S(\pi)$?

תרגיל 6.8 בקטע $[0,2]$, פתחו את הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases},$$

(א) לטור קוסינוסים .

(ב) לטור סינוסים.

תרגיל 6.9 תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור 2π בעלת טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$

$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$. נגדיר פונקציה חדשה $g(x)$ ע"י:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x)=f(x+\pi)$. גם לפונקציה החדשה קיים טור פורייה בקטע $[-\pi,\pi]$:

$g(x) \sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)\right)$. בטאו את A_n ו- B_n על ידי a_n ו- b_n.

תרגיל 6.10

(א) פתחו את הפונקציה $f(x)=\sin x$ לטור פורייה טריגונומטרי של קוסינוסים בקטע $[0,\pi]$.
ציירו את הפונקציה אליה מתכנס הטור שקבלתם בקטע $-3\pi \le x \le 3\pi$.

(ב) פתחו את הפונקציה $f(x)=\cos x$ לטור פורייה טריגונומטרי של סינוסים בקטע $[0,\pi]$.

ציירו את הפונקציה אליה מתכנס הטור שקבלתם בקטע $-3\pi \le x \le 3\pi$.

(ג) פתחו את הפונקציה $f(x)=\sin x$ לטור פורייה של סינוסים בקטע $[0,2]$.
ציירו את הפונקציה אליה מתכנס הטור שקבלתם בקטע $-6 \le x \le 6$.